par Hervé Lehning

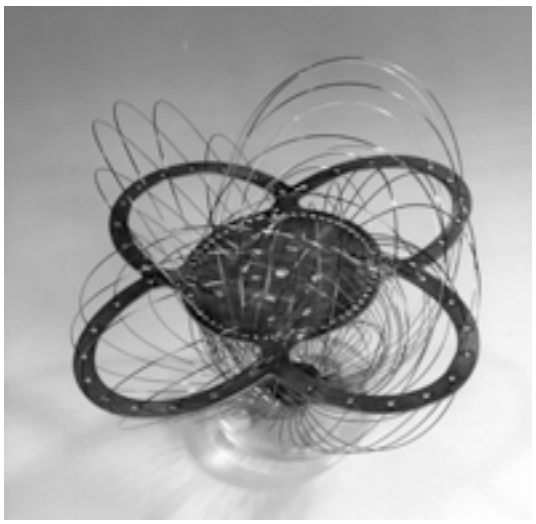
Un bouquet d'ellipses pour retourner la sphère

François Apéry a remporté le concours Art & Maths 2010 de Tangente avec une construction de la surface de Morin, étape intermédiaire du retournement de la sphère, en bouquet d'ellipses. Comment l'a-t-il réalisée ?

Imaginez un ballon de football, peint en vert à l'extérieur et en rouge à l'intérieur. On demande de le retourner sans le déchirer, c'est-à-dire de faire passer le côté rouge à l'extérieur. Le passe muraille de Marcel Aymé (1902-1967) aurait sans doute plongé sa main dans le ballon, attrapé l'autre bord par l'intérieur pour le tirer… jusqu'à ce que retournement s'ensuive. Est-ce possible sans catastrophe, c'est-à-dire sans déchirure ? En restant dans l'espace de dimension trois, la réponse est non, sauf en autorisant à la sphère de se traverser elle-même, comme le ferait le passe muraille.

Le passe muraille,
œuvre de Jean Marais (1913-1998).

Quand on traduit le problème mathématiquement, il s'agit de construire une transformation différentiable de la sphère partant de l'extérieur en vert et arrivant à l'extérieur en rouge. Stephen Smale a montré que c'était possible, Bernard Morin l'a réalisé en passant par une étape centrale qui concentre les difficultés, et François Apéry a explicité les équations de ce modèle central. De plus, sa réalisation est esthétique !



La surface de Morin en bouquet d'ellipses, œuvre de François Apéry.

La technique utilisée par François Apéry ne donne pas la surface de Morin dans son entier mais la laisse deviner, comme nous pouvons le faire avec une surface réglée (c'est-à-dire engendrée par des droites) telle un cône ou un cylindre. Dans ce cas, les tracés de quelques génératrices et de la directrice suffisent pour visualiser la surface.

Le jonc métallique

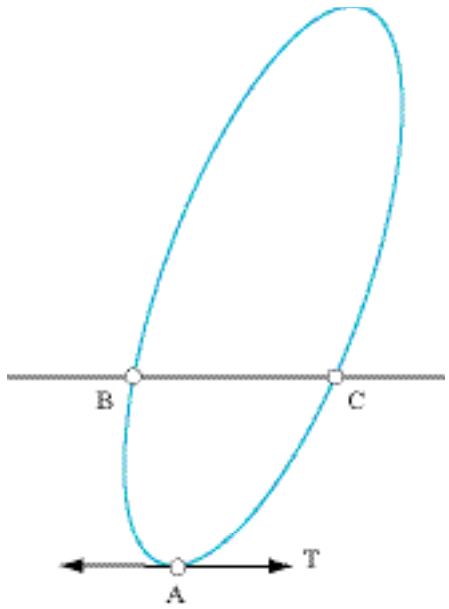
Pour ses constructions, François Apéry utilise du fil d'acier connu par les orthodontistes sous le nom de jonc métallique. Son élasticité lui permet de ne pas garder trace des déformations qu'il subit si elles ne sont pas trop importantes. En le soumettant à quelques contraintes, il prend la forme d'une courbe. Par exemple, si on impose aux extrémités d'être dans le prolongement l'une de l'autre, il forme un cercle.

Contraintes donnant une ellipse

Dans le plan, les coniques sont représentées par des équations du second degré, elles dépendent donc de six coefficients

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0)$$

définis à un facteur multiplicatif près, ce qui réduit leur nombre véritable à cinq. Un système de cinq équations à cinq inconnues ayant en général une solution et une seule, une conique est définie entièrement par cinq contraintes.



Une conique est définie par cinq contraintes. On peut, par exemple, lui imposer de passer par les points A, B et C en étant tangente en A à la droite T, et d'avoir une longueur L.

De là vient la possibilité de construire une surface engendrée par des ellipses en imposant cinq contraintes à un fil d'acier. La courbe obtenue n'est pas réellement une ellipse mais en est une approximation suffisante pour donner une bonne idée de la surface.

Réalisation

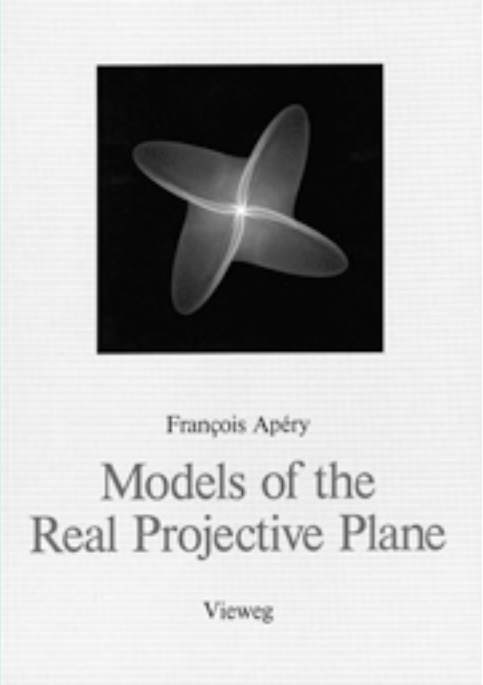
Les ellipses engendrant la surface de Morin passent par l'origine où elles sont tangentes au plan horizontal. Plus précisément, ce sont les images des méridiens de la sphère par la fonction :

$$(x,y) \mapsto \frac{\cos x}{1 - \sin y \cos y(\cos 2x - \cos 2y)} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos y + 2\sin y)\cos x \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos y - 2\sin y)\sin x \\ \cos y \end{pmatrix}$$

où x et y sont la longitude et la latitude sur la sphère. Cette expression n'est pas pratique pour les représenter par des fils d'acier. Pour les définir, il est préférable de préciser leurs longueurs et leurs points d'intersection avec le plan de côte 1. On montre que l'un doit être sur un cercle, l'autre sur une astroïde allongée. Ce sont les deux courbes en laiton visibles sur la sculpture. Elles sont percées de trous guidant les fils d'acier. L'ouvrage de François Apéry présenté en encadré permettra au lecteur intéressé d'obtenir les indications manquantes dans cet article.

H. L.

Models of the real projective Plane

Pour rester dans l'esprit du programme d'Erlangen de Klein, exposé dans l'article « *Les mathématiques ne sont qu'une histoire de groupes…* », la géométrie projective étudie les propriétés invariantes par projection. Le plan projectif correspond donc à l'ensemble des droites vectorielles de l'espace. Pour en obtenir un modèle, on peut ainsi partir de la sphère de dimension deux. On obtient alors chaque direction deux fois. Il convient donc de confondre les antipodes. Nous obtenons la surface étudiée par Werner Boy au début du XXe siècle. Comme il s'agit de topologie, cette surface n'est pas définie de façon unique, mais à un homéomorphisme près. Autrement dit, toute surface obtenue de la surface de Boy en la déformant comme si elle était en caoutchouc est encore la surface de Boy.

Dans son livre, François Apéry donne plusieurs représentations analytiques de la surface, certaines étant de son invention. En particulier, il montre comment l'engendrer par une ellipse mobile et en donne une équation polynomiale de degré six. La même méthode lui permet d'engendrer la surface de Morin.