



## PLAN & DESCRIPTION SUCCINTE DE L'EXPOSITION

*Par Claude Bruter*



*Caveat: Comme dans toute cette exposition, la disposition des œuvres tient compte non seulement de leur contenu mathématique, mais aussi des possibilités locales et physiques d'accrochage qui mettent parfois en défaut les appariements souhaités. Pour des raisons de sobriété, la présentation des œuvres situées dans la bibliothèque proprement dite sera succincte. Seules les œuvres présentées au rez-de-chaussée feront l'objet d'une présentation un peu plus détaillée, et que voici.*

En entrant dans le bâtiment de l'Institut, le visiteur fait face au couloir où sont exposées les œuvres les plus directement en rapport avec quelques-uns des travaux d'Henri Poincaré, concernant le mouvement et les espaces au sein desquels ils sont accomplis.



**IHP, couloir d'entrée**

Poincaré s'est intéressé à certains de ces domaines, *terrae incognitae* à son époque, comme les surfaces, objets de la dimension 2, dont la géométrie est hyperbolique, comme l'espace euclidien de dimension 4, et en particulier dans cet espace, la sphère. Ce sont ces domaines qui ont fait l'objet de représentations aux qualités esthétiques et que nous allons explorer.

### **1. La sphère de dimension 3 à travers les œuvres de Artmann, Banchoff et Leys**

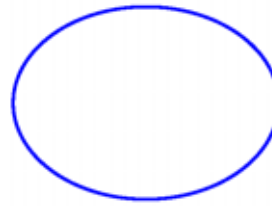
**Caveat:** forme (topologie) + mesure (métrique) = géométrique. On se placera ici essentiellement du point de vue de la forme (au sens mathématique): de ce point de vue, l'ellipse et le cercle représentent le même objet intrinsèque.

C'est avec le compas qu'on trace dans le plan un beau cercle, cette forme géométrique parfaite aux yeux de Platon et sans doute des Pythagoriciens. La pointe marquante suit le dessin d'une courbe qui revient sur elle-même. Une courbe, comme une ligne, est un objet de dimension 1. Comme le cercle, la sphère de dimension 1 peut être représentée par une ligne courbe: on la note par conséquent  $S_1$ .

On peut la décrire par ce mouvement platonicien parfait d'une rotation uniforme de  $360^\circ$  d'un point autour d'un point fixe. Ou encore par une rotation de  $180^\circ$  d'un couple de points (formant la sphère  $S_0$ , 0 car la dimension d'un point est nulle) autour de leur « milieu » (le « centre » de  $S_0$  noté  $D$ ).

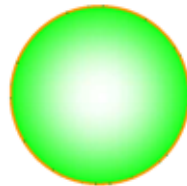


En rouge, un exemple de représentation de la sphère  $S^0$  composée de deux points. En noir, une représentation de de son « centre »,  $\mathbf{D}_0$ .



En bleu, un exemple de représentation de la sphère  $S^1$

Dans notre espace usuel, dont la dimension est 3, la sphère est comme la peau d'un orange infinie fine, c'est une surface, un objet de dimension 2, notée par conséquent  $S^2$ . On peut naturellement la construire, comme toute sphère de dimension quelconque, par rotation d'une sphère de dimension moindre – j'ai donné cette construction en 1974.



Remplie de métal, la 2-sphère change de statut, devenant le bord de  $\mathbf{D}^3$ , la boule étincelante au soleil et pesante du joueur à la pétanque:



c'est là un domaine de notre espace usuel, lequel avons-nous dit est de dimension 3.

La sphère de dimension 3, la 3-sphère  $S^3$ , située, elle, dans l'espace à 4 dimensions, a la consistance de cette boule du pétanqueur.

C'est à son propos que Poincaré a émis sa fameuse conjecture, démontrée in fine par Grigori Perelman. Comme sur la sphère usuelle de dimension 2, on peut s'y promener en suivant des chemins qui reviennent à leur point de départ, et qui ont peu ou prou la forme d'un cercle, en d'autres termes celle d'une sphère  $S^1$ :



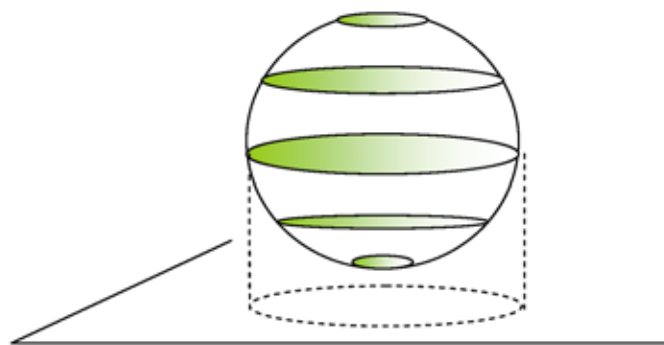
On peut bien sûr déformer un tel chemin fermé sur lui-même, encore appelé un lacet, en un autre de longueur plus petite, jusqu'à éventuellement n'obtenir qu'un point.

Supposons qu'on ait en main un autre domaine de cet espace à quatre dimensions, aussi compact que la sphère, et qui bénéficie de cette même propriété qu'on vient de reconnaître pour la sphère : tout lacet tracé sur le domaine peut être continûment déformé en un point. Alors, selon Poincaré, ce domaine, supposé malléable, peut être continûment déformé en la sphère  $S^3$ .

Nous n'avons pas de vision directe de cette dernière sphère, et on a essayé de s'en faire une idée par l'intermédiaire de modes possibles de construction.

Les premières œuvres que l'on voit en entrant, celles de Tom Banchoff, la première de Jos Leys, celle de Benno Artmann, correspondent à une description dont l'initiateur a été le mathématicien allemand H. Hopf en 1931. Partant de son équation, il montre qu'on peut construire la 3-sphère en associant à chaque point d'une sphère ordinaire  $S^2$  un cercle ordinaire  $S^1$ , maintenant appelé cercle de Hopf.

Comme on peut imaginer la sphère ordinaire, bien découpée par des plans parallèles, comme une sorte de millefeuille (Figure 1) dont chaque feuille serait un cercle de taille bien sûr nulle en chacun des pôles nord, PN, et sud, PS, de la sphère, ces cercles sont dits alors singuliers.



**La sphère en tant que millefeuille**

**Figure 1**

On conçoit alors que notre sphère  $S^3$  dans l'espace à quatre dimensions puisse être également simplement construite avec seulement des cercles  $S^1$ . Peut-on concrétiser quelque peu cette conception ?

Prenons un des cercles de rayon non nul du millefeuille : en chacun de ses points, avons-nous dit, lui est associé un cercle ordinaire. Cette configuration peut rappeler à certains des souvenirs : les joailliers d'autrefois disposaient d'un anneau métallique en divers points duquel étaient accrochés d'autres anneaux de taille plus diverse servant à déterminer le diamètre du bijou à créer. Ces baguiers constituaient ainsi une approximation des représentations physiques possibles de la configuration évoquée. La forme d'un tore creux, d'une bouée, en donne une représentation plus complète.

Ce tore creux est noté  $T^2$  ou  $S^1 \times S^1$ , notation qui signifie qu'à tout point  $s$  d'un premier cercle, celui de taille non nulle extrait du millefeuille, appelé l'âme du tore, est associée une autre courbe analogue à un cercle, représentée par le second  $S^1$  : pour souligner que celui-ci est attaché à chaque point  $s$  du premier, il sera noté  $S^1(s)$ .

Physiquement,  $S^1(s)$  peut être représenté sur les deux dessins ci-dessous par un cercle disposé verticalement : mais on peut le pencher et en modifier la forme à souhait, pourvu que cette forme conserve les propriétés topologiques du cercle type fondateur.

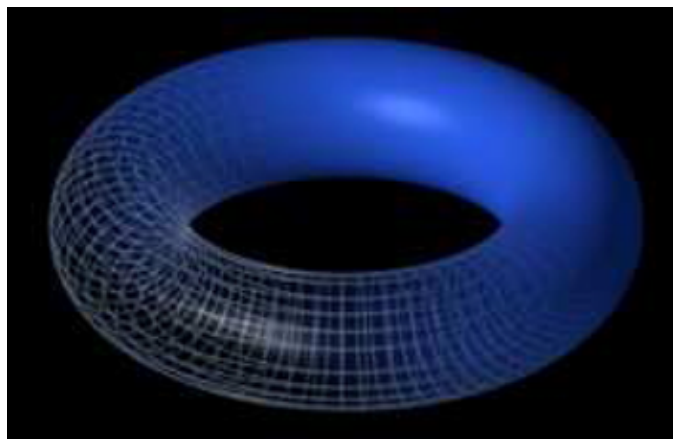


Figure extraite de Wikipédia

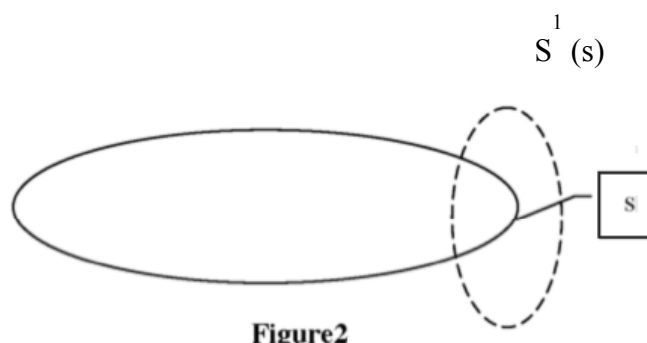


Figure2

Pour obtenir la 3-sphère, il faut envisager et assembler tous les tores que l'on peut ainsi construire. Il en est autant que de cercles sur le millefeuille, et donc autant de points qui les représente, qu'en contient le diamètre du millefeuille dirigé selon son axe nord-sud.

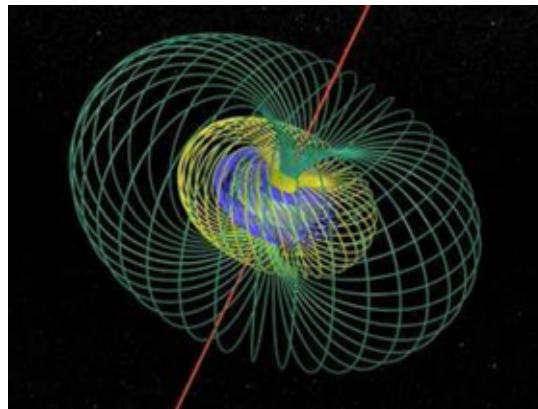
Les œuvres de Banchoff et de Leys montrent des représentations locales et partielles d'assemblages de ce genre. Voyons comment ils sont conduits.

Regardons d'abord notre 2-sphère habituelle supposée éclairée de dessus par un faisceau de rayons verticaux, issus d'une source située dans la direction nord-sud, mais bien loin au delà du pôle nord, à l'infini.

Nous voyons sur la première figure qu'un cercle quelconque du millefeuille a pour ombre, pour image, un cercle égal dans le plan passant par le pôle sud et perpendiculaire à l'axe sud-nord.

C'est un phénomène tout à fait analogue qui se produit lorsqu'on éclaire dans l'espace à 4 dimensions la 3-sphère par un faisceau de rayons lumineux tous perpendiculaires à l'espace tangent à cette sphère en son pôle sud, espace tangent qui maintenant a la dimension 3, alors que dans le cas précédent il avait la dimension 2.

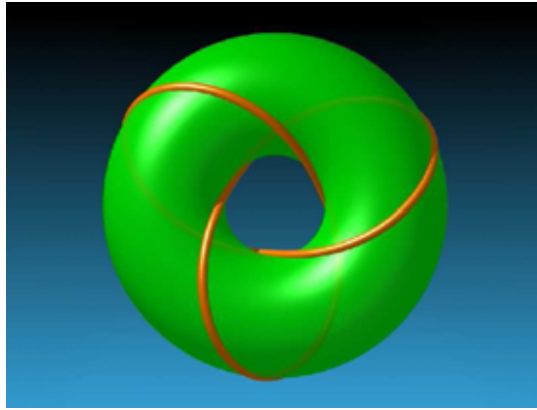
Les tores précédents, analogues à nos cercles sur la 2-sphère usuelle, ont pour ombre, pour image, pour projection dans l'espace tangent au pôle sud à la 3-sphère des tores équivalents. L'image suivante en montre quelques-uns.



**Jos Leys**

[http://www.dimensions-math.org/Dim\\_CH7.htm](http://www.dimensions-math.org/Dim_CH7.htm)

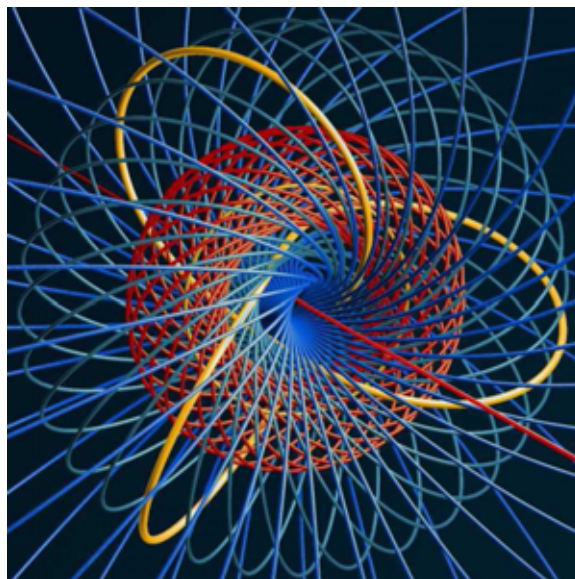
Il y a bien des façons de concevoir, avons-nous laissé entendre, la représentation physique du tore  $\mathbf{T} = \mathbf{S}_2 \times \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1$ , par exemple selon la forme que l'on donne au second des  $\mathbf{S}_1$  : ce peut être un vrai cercle, appelé ici un nœud régulier trivial, comme dans l'image que donne Wikipédia ; mais ce peut être aussi un nœud à trois lobes ou feuilles, dit nœud de trèfle, qui s'enroule sur le tore (on voit à l'étage, dans une vitrine, un tel nœud bien régulier réalisé par Philippe Rips),



**Jos Leys**

plus généralement un nœud ayant un nombre impair de feuilles. Le tore peut ainsi être entièrement recouvert par un nombre infini de tels nœuds.

Ce sont de tels tores feuilletés par des nœuds que l'on voit dans le tableau de Jos Leys:



**Jos Leys**

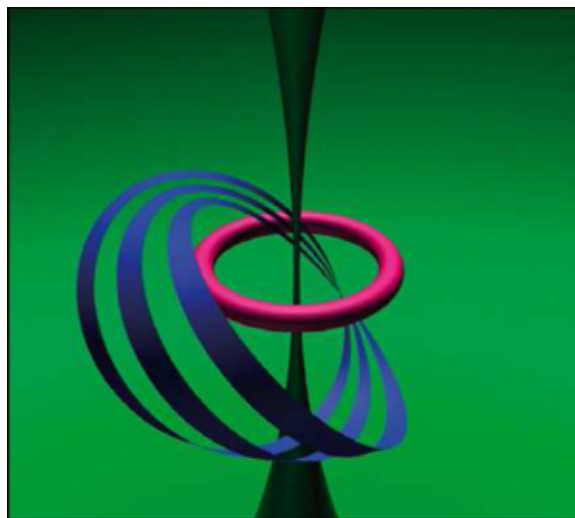
Le pôle sud  $PS_1$  étant un cercle du millefeuille réduit à un point, le tore correspondant se limite à ce seul  $S_1$  ( $PS_1$ ) passant par le point  $PS_1$  : il est représenté sur le tableau par le nœud de trèfle couleur or. Il n'y a, de la même façon, qu'un seul  $S_1$  au pôle nord. En gonflant la sphère à tel point que ce pôle nord se trouve à l'infini, la trace de la projection du  $S_1$  qu'il porte est maintenant une droite, en rouge sur l'image.

Tous ces faits ayant pu être obtenus par le calcul, leur programmation conduit à la réalisation d'images aux lignes parfaites, respectant au mieux les symétries. L'emploi expert d'un

logiciel pictural permet à l'homme de l'art de créer cette image qui, définitivement, saisit le regard.

Les travaux pionniers du mathématicien américain Tom Banchoff, et qui ont conduit à la création des tableaux que nous voyons, remontent à 1978. Ceux-ci ont été réalisés au début des années 80 avec une petite équipe constituée de Huseyin Kocak, Fred Bishopp, David Laidlaw, et David Margolis, animée par David Cervone.

Hopf Links ci-dessous, une œuvre très élégante, montre trois des tores précédents, présentés différemment. L'un est grand par rapport aux deux autres, on n'en voit que la surface lisse de couleur verte, elle constitue le fond du tableau. Le second tore, également lisse, le plus petit, est rose, alors que le troisième tore, intermédiaire, est bleu: il n'est pas représenté entièrement, seulement par quelques cercles élargis en bandes qui s'enroulent autour du tore.

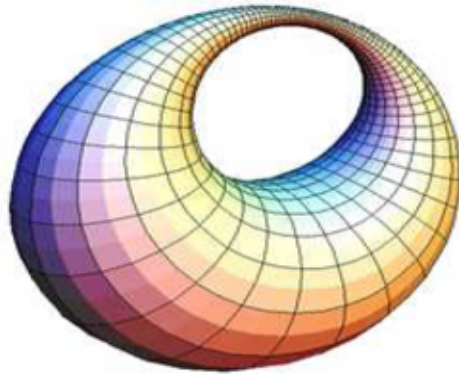


**Tom Banchoff**

On remarquera ici que les tores rose et bleu sont enlacés: l'étude des  $S^1$  associés à deux points  $s$  et  $s'$ , situés chacun sur l'un de deux cercles voisins du millefeuille, montre cet enlacement. Sont également enlacés deux  $S^1$  associés à deux points voisins situés sur l'un quelconque de ces cercles. Ce phénomène est rendu ici plus visible que sur l'image faite par Jos Leys. Le tore bleu de Banchoff révèle d'ailleurs un autre mode de remplissage, on dit feuilletage, de la surface du tore  $T^2$ .

Prenons le tore bleu de Wikipédia, et sur ce tore, choisissons un cercle cobaye  $S^1(s)$  vertical. On en réduit progressivement la taille, ainsi donc que celle de ses voisins. Le tore prend alors le nom de cyclide de Dupin. Le tore bleu précédent, éclairé par un faisceau lumineux non perpendiculaire au plan équatorial du tore, a pour image une telle cyclide.

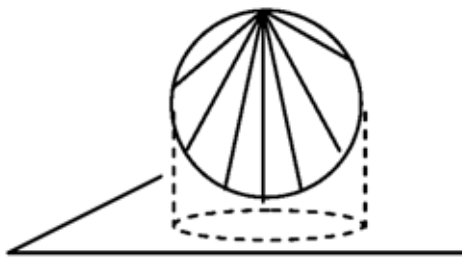




Lorsque le serrage du tore prend fin, le cercle cobaye en est réduit à n'être qu'un seul point. On dira que le tore est pincé en ce point dit singulier.

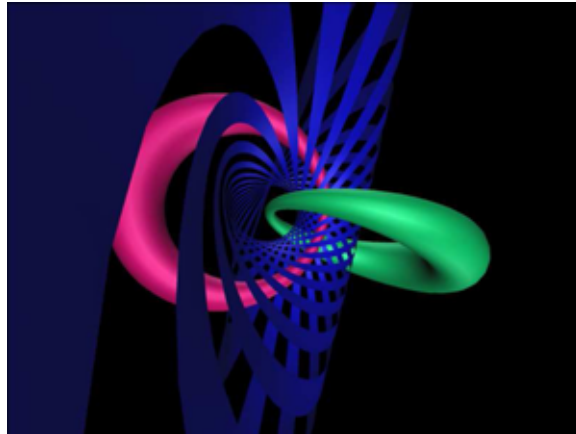
Une autre manière d'obtenir ce tore pincé consiste à prendre notre sphère habituelle, à l'allonger dans le sens sud-nord de sorte qu'elle prend une forme proche de celle d'un ellipsoïde, d'un boudin. On l'étire encore si nécessaire, puis on la courbe de manière à faire que pôle nord et pôle sud se touchent : on a bien un obtenu un tore pincé. En éclatant, déployant au contraire le point singulier en cercles, on reconstitue le tore initial.

Jusqu'à présent, nous avons considéré la sphère habituelle comme un millefeuille de cercles situés sur des plans parallèles. Mais il y a bien d'autres façons de découper la sphère en cercles : à l'aide de plans hachoirs passant par l'axe nord-sud, on peut par exemple la découper en grands cercles méridiens passant par les pôles sud et nord ; on peut aussi, à l'aide de nos hachoirs passant tous par le pôle nord, et pivotant autour de ce point, la découper en cercles passant tous également par le pôle nord.



La fabrication du tore pincé à partir de la 2-sphère ainsi feuilletée, puis son éclatement, permet de mieux voir comment sont maintenant disposés les cercles  $S_1(s)$  sur le tore bleu de Banchoff.

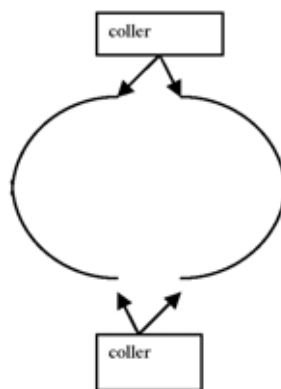
L' image qui suit met bien évidence les tores enlacés que le « regard » voit en forme de cyclides de Dupin.



**Tom Banchoff**

Nous allons maintenant aborder une autre manière de construire la sphère  $S^3$ , elle ne fait que généraliser une manière de construire les sphères  $S^1$  et  $S^2$ .

Pour construire le cercle ordinaire  $S^1$ , il suffit de prendre deux segments, deux bouts de fils, et de les coller par les extrémités qui se correspondent.



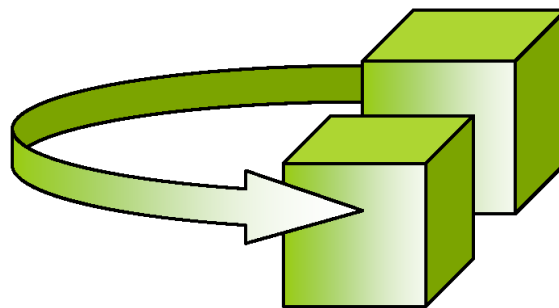
Dans le patois des mathématiciens, le segment est un élément de courbe, un objet de dimension 1, noté  $D_1$ , dont les extrémités forment les deux points d'un cercle  $S^1$ , le bord de  $D_1$ . La sphère  $S^1$  s'obtient par identification (impliquant le collage) des bords de deux  $D_1$  (segments, bouts de fil). Pareillement, un élément de surface en forme de disque plat ou non, de coupelle, de bol sans épaisseur, est noté  $D_2$ ; il a pour bord un cercle  $S^1$ . Lorsqu'on prend deux de ces bols, qu'on les renverse l'un sur l'autre, et qu'on les colle selon leur bord commun qu'on n'aperçoit plus, on obtient la sphère ordinaire  $S^2$ .

De la même façon, pour construire la sphère  $S^3$ , on prendra deux boules  $D^3$  (les boules du pétanqueur) qu'on collera selon leur bord commun, la sphère  $S^2$ .

Or une boule de pétanqueur peut s'obtenir simplement en déformant un cube plein, dont le bord est un cube creux, qui a 6 faces. Si donc on colle deux cubes pleins selon leur bord commun, qui est le cube creux, on obtient un objet déformable en la sphère  $S^3$ .

Par ailleurs, si on prend un tel cube plein, qu'on allonge en un parallélépipède plein, et qu'on colle deux faces opposées, on obtient un tore plein. Notons qu'en supposant ces deux faces tournées l'une par rapport à l'autre de  $180^\circ$  on obtient un tore torsadé.

Si donc on reprend nos deux cubes ou parallélépipèdes pleins, ils totalisent  $6 + 6 = 12$  faces, que l'on commence par identifier une face du premier à une autre du second, ce qui les accole, puis les faces opposées correspondantes, on obtient un premier tore plein dont la section est carrée, sur lequel apparaissent  $12 - 4 = 8$  faces, 4 faces de ce qui appartenait au premier demi-cube devant être identifiées à 4 faces de ce qui appartenait au second cube.



Il suffit pour cela de couper ce tore plein en ces deux moitiés selon les faces déjà identifiées, ce qui donne deux demi-tores que l'on complète en tores en identifiant à nouveau les faces qui viennent d'être séparées. Chacun de ces tores à section carrée portent 4 faces, les 4 faces du premier devant être identifiées aux quatre faces du second.

La 3-sphère s'obtient donc par identification des bords de ces deux tores pleins.

Une autre justification de ce fait est la suivante. Partons à nouveau du fait que la 3-sphère peut s'obtenir en associant un  $S^1(s)$  à tout point  $s$  situé sur un  $S^1$  cercle du millefeuille sphérique. Partageons cette sphère en deux coupelles, en deux moitiés égales, chacune ayant pour bord l'équateur. On reconstitue la sphère en identifiant les bords de ces coupelles.

Prenons une de ces coupelles, disons celle qui contient le pôle Nord. La projection sur le plan tangent à ce pôle des cercles de la coupelle forme un disque plat, feuilleté par les cercles projetés, ayant pour centre le pôle. Chacun de ces cercles donne naissance à un tore creux, fut-il singulier comme celui associé au pôle nord, un cercle de rayon nul : l'ensemble de ces tores creux constitue un tore plein. Le bord de ce tore plein « nord » est le tore creux formé à partir du cercle équatorial, il est composé de  $S^1$  enlacés, des fibres de Hopf.

De la même façon, on construit un tore plein « sud » avec la coupelle portant le pôle sud. Il a le même bord que le tore « nord ».

L'identification des deux tores pleins par leur bord commun reconstitue la 3-sphère.

Le tableau de Benno Artmann est une illustration symbolique de cette construction. Il s'agit en fait d'une photographie d'un petit plâtre (hauteur 35 cm) fait des mains de l'auteur. Les deux tores sont enlacés, les torsades représentent les fibres de Hopf.



**Benno Artmann**

Une remarque pour conclure : on peut envisager toutes les sphères comme appartenant à une forme parfaite du déploiement d'un point, considéré comme cercle de rayon nul. Il existe une variante de ce déploiement lorsque le point se déploie en une famille de tores. Les deux formes de déploiement sont fortement liées.

Le premier stade de ces déploiements leur est commun, le tore  $T^1$  n'étant autre chose du point de vue topologique que le cercle  $S^1$ . La différence entre les deux déploiements apparaît dès la seconde dimension, mais reste stable ensuite. Nous avons déjà largement rencontré le tore  $T^2 = S^1 \times S^1$ . Plus général est le tore  $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ ,  $S^1$  apparaissant  $n$  fois. Chaque  $S^1$  étant décrit par la variation d'un seul angle,  $n$  angles  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , décrivent ce tore  $T^n$ . Le fait intéressant quoique élémentaire est que ces mêmes  $n$  angles suffisent mais sont aussi nécessaires pour obtenir l'équation cartésienne de la  $n$ -sphère.

## 2. Les pavages du disque par Jean Constant, Jos leys et Radmilla Sazdanovic

Poursuivons notre visite. Non, non, nous ne nous arrêtons pas devant le tableau suivant, nous allons vers le fond du couloir, quelque chose comme le symétrique de l'entrée.

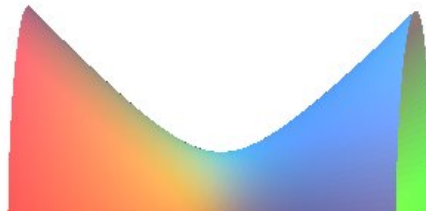
Ce sont les œuvres rondes de Jean Constant, de Jos Leys et de Radmilla Sazdanovic qui vont d'abord retenir notre attention. Le thème mathématique qu'elles illustrent est celui du pavage du disque dit hyperbolique de Beltrami-Poincaré, introduit par le mathématicien italien Beltrami.

Qu'entend-on par géométrie hyperbolique ?

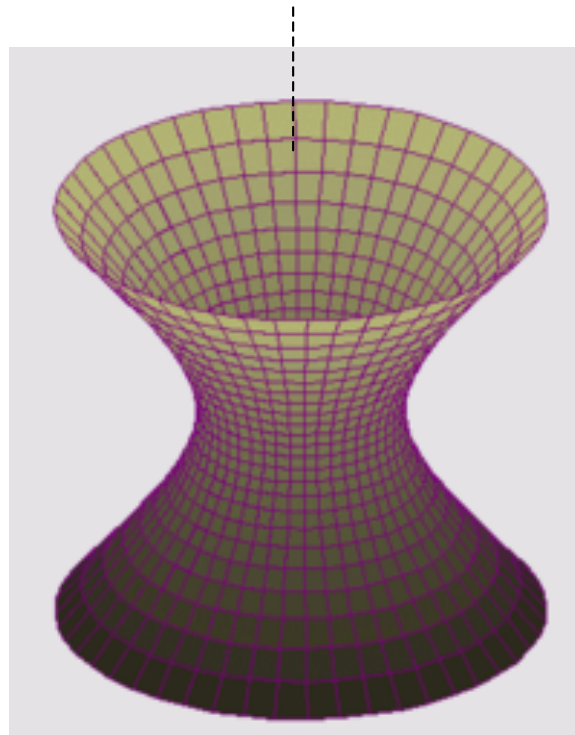
Le sol sur lequel nous marchons est appelé par les mathématiciens une surface. La géométrie sur un élément de surface est caractérisée par les propriétés d'un triangle dessiné sur cet élément.

On démontre qu'il n'y a que trois possibilités, trois types de surface :

- 1) sol plat, la somme des angles d'un triangle vaut  $360^\circ$ , la géométrie est celle que l'on étudie dans les collèges et lycées, elle est dite euclidienne.
- 2) Sol sphérique, la somme des angles d'un triangle est supérieure à  $360^\circ$ : la géométrie est sphérique
- 3) Sol ayant la forme d'un col entre deux montagnes, d'une selle de cheval,

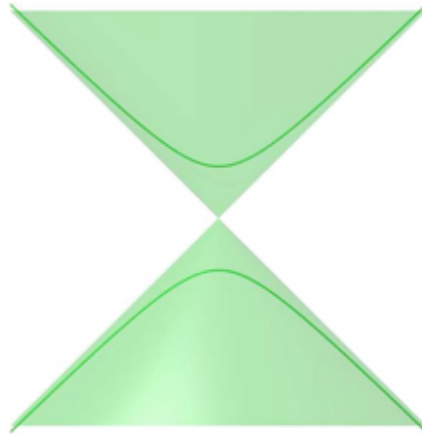


la somme des angles d'un triangle y est inférieure à  $360^\circ$  : la géométrie est dite hyperbolique car cette forme est celle de la surface mathématique engendrée par la rotation d'une hyperbole autour de l'axe ne la rencontrant pas, et appelée l'hyperboloïde à une nappe:



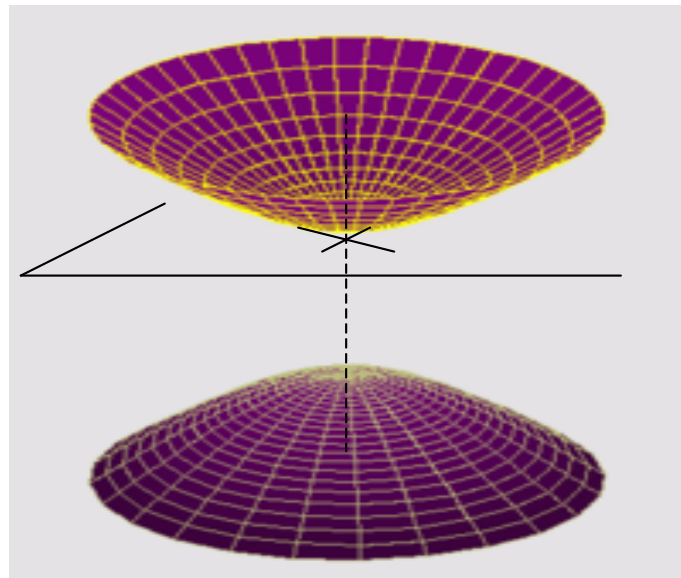
*Image empruntée à Wikipédia*

En faisant tourner une hyperbole autour de l'axe qui la traverse, on obtient



**Jos Leys**

l'hyperboloïde à deux nappes, qui se présente sous la forme de deux coupelles, de deux vases infinis symétriques l'un par rapport à l'autre.



*Image empruntée à Wikipédia*

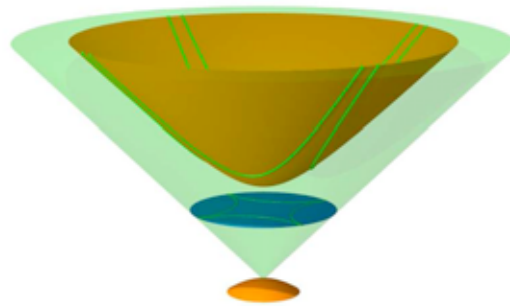
Quoique jumeaux par la même hyperbole génératrice, les deux hyperboloïdes diffèrent par leur géométrie, du type hyperbolique pour le premier, sphérique pour le second.

Il n'empêche que l'un et l'autre portent le même espace d'hyperboles : en particulier les sections par des plans passant par le centre de symétrie de l'hyperboloïde à deux nappes par exemple sont des hyperboles.

C'est cet espace d'hyperboles que nous allons représenter sur un disque par leur projection dite stéréographique.

Un faisceau lumineux conique issu du pôle sud de l'hyperboloïde à deux nappes en éclaire la partie supérieure. Les rayons de ce faisceau sont à l'intérieur du cône défini par les asymptotes à l'hyperbole génératrice et qui entoure l'hyperboloïde.

Le rayon lumineux qui frappe l'hyperboloïde en un point traverse le plan de symétrie en un point qui constitue l'image du point sur l'hyperboloïde.



**Jos Leys**

L'intersection du faisceau lumineux conique avec l'«écran» formé par le plan de symétrie est le fameux disque de Beltrami-Poincaré, encore appelé le disque hyperbolique.

L'image de l'hyperbole sur la surface est, dans le plan du disque, un cercle orthogonal au cercle qui borde ce disque

Naturellement, davantage est éloigné du pôle nord un triangle sur l'hyperboloïde, plus petit est son image sur le disque.

Sur l'hyperboloïde, un arc d'hyperbole a une certaine longueur. Par la projection stéréographique, cet arc d'hyperbole devient, dans le plan, un arc de cercle, auquel on attribue, par convention, la longueur précédente. On dit que le disque est muni de la métrique hyperbolique.

On entend par pavage d'un domaine un ensemble de parties du domaine, toutes identiques, appelons-les des pavés, qui, pouvant se toucher en leur bord mais point se chevaucher, permettent de remplir le domaine sans qu'il y ait de vide.

Pour réaliser un pavage, on suppose qu'on dispose en un lieu sûr d'une quantité suffisante de pavés, qu'on met en place, qu'on déplace.

Le mouvement que chacun d'eux accomplit est représenté par un nombre. La sémantique d'un nombre est assez riche car il peut représenter une quantité, il peut désigner une position sein d'un ensemble ordonné, plus fondamentalement il représente un mouvement.

Anticipant un résultat du mathématicien du 19<sup>e</sup> siècle, Liouville – à moins que celui-ci de ne soit inspiré du Stagirite – Aristote énonça qu'il y avait dans le monde physique trois types de mouvement, celui de translation, celui de rotation, et le mixte. Il considérait que le mouvement de rotation, parfait par nature, était antérieur au mouvement de translation.

Une translation, en dimension 1, est représentée par un nombre qu'on dit réel ; une rotation, en dimension 1, est représentée par nombre qu'on appelle un angle. Un mouvement mixte qui associe la translation ou la dilatation avec la rotation est représentée par un nombre noté fréquemment  $z$ , jusqu'ici dit nombre complexe, que j'ai appelé aussi nombre de

Chuquet-Cardan du nom de celui qui les a introduits (Chuquet) et de ses premiers utilisateurs, et que je propose d'appeler ici nombre mixte de dimension 1.

Ces nombres ne rendent pas compte d'une autre transformation qui a la vertu de toujours conserver les angles : l'objet déplacé peut être tourné par rapport à sa position initiale, il peut être de taille petite en certaines de ses parties, l'angle qu'elles font entre elles est inchangé.

Ce mouvement est représenté par ce que nous appellerons désormais le nombre homographique  $h$ . De même que le nombre mixte  $z$  peut s'écrire à partir de deux nombres réels ( $z = x + i y$  où  $i$  représente en fait une rotation de  $90^\circ$ ),  $h$  s'écrit de manière la plus générale à partir de nombres mixtes sous la forme :

$$h = \frac{az + b}{cz + d}$$

Cette expression de  $h$  a été introduite par Euler en 1777. Le mathématicien allemand Möbius a montré en 1855 toute la richesse géométrique attachée à ce nombre, c'est-à-dire tous les mouvements possibles qu'il peut préciser.

Ces nombres, donc ces mouvements, se composent entre eux, présentent une propriété de réversibilité, et s'organisent en cette structure très stable qu'on nomme une structure de groupe.

Supposons qu'on veuille paver la droite par de pavés de longueur 1, supposés placés tous en un point de la droite noté 0. On place le premier qui occupe le segment d'origine 0 et d'extrémité 1. Pour placer le second disons à droite du premier, il faut donc prendre un autre pavé et lui faire accomplir un mouvement de translation de longueur 1. Pour placer un troisième pavé, il faudra décaler le pavé choisi de deux translations de longueur 1. Cet exemple pour souligner qu'on ne fait, lors de ce pavage par des motifs identiques, que des déplacements représentés par des nombres entiers : le groupe de mouvements qu'ils constituent est appelé discret, au contraire de déplacements qui seraient représentés par des nombres quelconques, pouvant être aussi près les uns des autres que cela serait nécessaire, et qui formeraient un groupe continu.

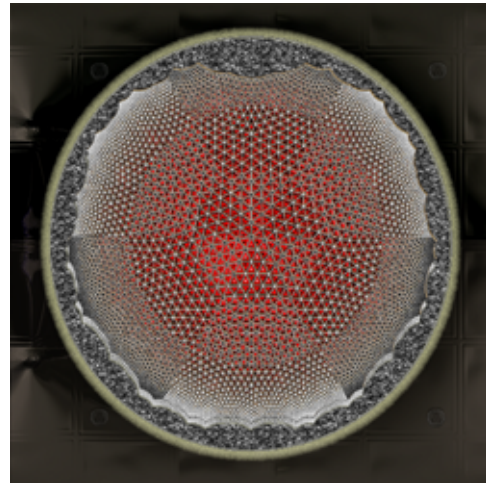
Paver l'hyperboloïde par des motifs identiques implique donc que le groupe des déplacements des motifs soit discret. Si l'on part d'un polygone régulier dont le centre est également celui du disque image de l'hyperboloïde, le mouvement qui le déplace en l'un des ses voisins doit en diminuer la taille, tout en en conservant les angles.

Poincaré, comme son contemporain le mathématicien allemand Immanuel Fuchs, travaillait sur la théorie des équations différentielles. Fuchs a montré l'invariance de certaines d'entre elles par des nombres homographiques  $h$ . Inspiré par ce travail de Fuchs, Poincaré a vu que le groupe de mouvements qui permettait de réaliser le pavage sur le disque hyperbolique était un groupe discret de nombres homographiques  $h$ . Ce groupe est ici un peu particulier puisque en répétant l'action de  $h$  on finit par avoir des polygones dans le plan de plus en plus petits, la limite atteinte étant celle du cercle qui borde le disque. C'est ce groupe particulier que Poincaré a nommé fushien.



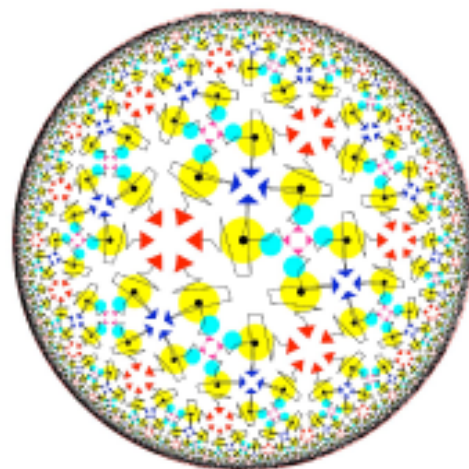
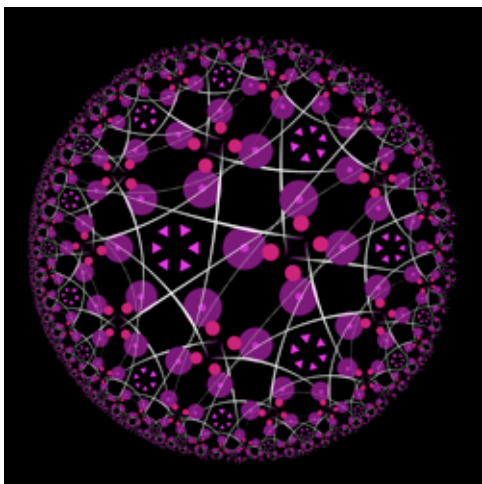
Jean Constant et Radmilla Sazdanovic nous présentent des œuvres dont les arrière-plans sont des pavages du disque hyperbolique.

Jean Constant, qui est artiste, ne calcule ni le motif et le pavage : il les emprunte à des mathématiciens, et se sert de l'ordinateur comme d'un crayon, d'un fusain, ou d'une palette, pour faire vivre, faire respirer les objets mathématiques dans l'espace usuel, en leur donnant des teintes, des couleurs, des éclairages, un relief qui créent des illusions d'espace et de mouvement.



**Jean Constant**

Le travail de Radmilla Sazdanovic est tout autre, relève d'un état d'esprit différent. Mathématicienne, Radmilla a travaillé sur ce disque hyperbolique et accompli le travail de programmation nécessaire à la réalisation de ses œuvres. Leur contenu mathématique est plus riche que celui des œuvres précédents. Mais la vocation artistique est différente, ici décorative.

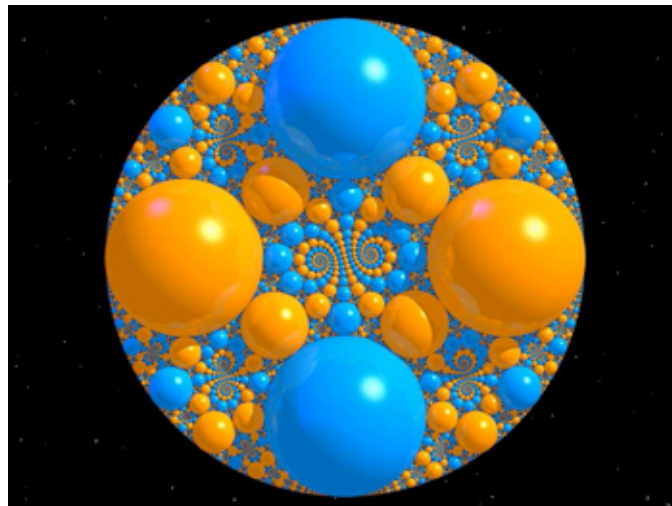


**Radmilla Sazdanovic**

Les œuvres de Jean Constant reposent sur le même pavage classique du disque par des seuls triangles équilatéraux, chacun entouré par sept autres triangles, alors que les œuvres de Radmilla Sazdanovic font appel à un pavage hexagonal régulier où chaque sommet est commun à quatre hexagones.

Le fait que chaque sommet du polygone régulier soit le bord de  $q$  arêtes implique que l'angle en un sommet de chaque polygone soit égal à  $360^\circ/q$ . Si le polygone régulier possède  $p$  côtés, on peut le diviser en  $p$  triangles isocèles égaux ayant pour sommet commun le centre du polygone ; l'angle de chaque triangle en ce sommet commun vaut donc  $360/p$ . Chaque côté de ce triangle qui n'est pas sur le polygone, le rencontre en l'un de ses sommets, et partage en deux moitiés égales l'angle du polygone en ce sommet. La somme des angles de ce triangle hyperbolique vaut donc  $360^\circ/2q + 360^\circ/p + 360^\circ/2q$  ; elle est inférieure à  $180^\circ$  puisque le triangle est hyperbolique, d'où la relation  $1/p + 1/q < 1/2$  qui implique une possibilité infinie de pavages du disque par des polygones réguliers.

Le visiteur rencontrera à la bibliothèque d'autres pavages du disque, en mosaïque par Irène Rousseau, à la Escher par Jos Leys. Il admirera ici une autre œuvre de Jos Leys.



**Jos Leys**

Elle illustre la réponse à une question posée par le mathématicien allemand Félix Klein : peut-on parvenir à remplir un disque avec d'autres disques, de tailles plus petites bien sûr. Cette réponse est positive, dont les éléments sont décrits en fort grand détail dans ce très beau livre publié par un trio de mathématiciens : David Mumford (un médaillé Fields comme Perelman), Caroline Series, David Wright. Le livre s'intitule **Indra's Pearls, The vision of Felix Klein**, et a été publié pour la première fois en 2002 par Cambridge University Press. Admirablement écrit, il est accessible à tous, le lecteur devant être simplement patient avant d'atteindre l'épilogue. Si je puis me permettre, je ferai une remarque à son propos, elle ne concerne pas d'ailleurs ces auteurs de manière spécifique. En matière d'histoire de leur discipline, les mathématiciens d'aujourd'hui ont tendance à s'en tenir aux seuls énoncés de leurs prédécesseurs, traçant un trait sur leur formation, leurs lectures, leur milieu, leurs relations. Or en matière de considérations sur la symétrie et sur la notion de groupe en tant que groupe de transformations, on ne peut faire abstraction de l'influence sur Klein du

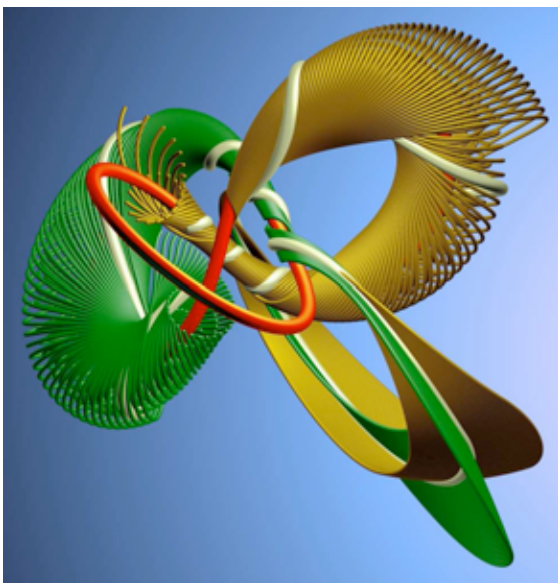
cristallographe Bravais, et surtout de celle du physicien Helmholtz, sans lequel, vraisemblablement, le programme d'Erlangen n'aurait pas été énoncé.

Mais revenons au tableau de Jos Leys: sa construction fait notamment un appel constant au groupe et à certains sous-groupes des homographies  $h$ . Les trois œuvres de Jos Leys qui se trouvent dans l'entrée de la bibliothèque relèvent de la même problématique et des mêmes techniques mathématiques, parfaitement maîtrisées par cet artiste.

### 3. L'étude des mouvements à travers deux œuvres de Jos Leys

Poincaré a consacré une part importante de son temps à l'étude des mouvements, c'est par elle qu'il est devenu rapidement célèbre. Etude quantitative certes, mais aussi étude qualitative, une branche des mathématiques qu'il a créée : il arrive qu'on ne puisse pas parvenir à préciser les données numériques qui déterminent localement les caractéristiques du mouvement, au moins peut-on en décrire les modalités de son comportement et de son devenir. Se dirige-t-on par exemple vers une situation figée, ou bien en état de rotation uniforme, ou au contraire abandonne-t-on définitivement ce genre d'état ? Quelle peut être l'influence d'une petite variation des données initiales sur le comportement futur ?

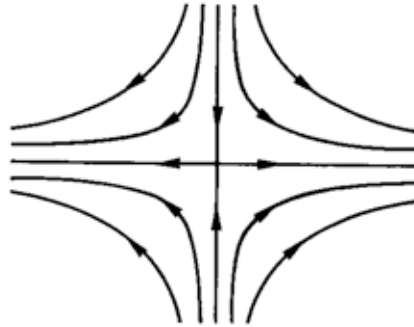
Ces deux œuvres de Jos Leys montrent des trajectoires associées à des situations intéressantes.



Jos Leys

Dans l'œuvre de gauche, elle a orné la couverture du numéro de Janvier 2007 des *Notices de l'American Mathematical Society*, deux trajectoires respectivement teintées en or et en vert s'enroulent autour d'un nœud de trèfle coloré en rouge : ces trajectoires viennent d'abord s'enrouler autour du nœud qui joue le rôle d'un attracteur, mais finissent par le quitter, le nœud joue alors le rôle d'un répulseur. Un tel système dynamique est dit d'Anosov, du nom du mathématicien russe qui l'a étudié en grande généralité il y a une quarantaine d'années. Le cas particulier décrit par Poincaré, et à l'origine de cette étude, est celui où les trajectoires se

rapprochent d'un point ayant alors un pouvoir attractant, puis s'en éloignent alors qu'il exerce une action dite répulsive. Le point peut éclater en une courbe fermée comme c'est le cas dans la situation visualisée par le tableau. Ce point que nous venons de considérer est appelé un point col ou un point-selle: regardons la petite figure de la page 14 qui représente un col ou une selle, et imaginons que nous la coupions par des plans horizontaux parallèles entre eux : les sections ont la forme des courbes-trajectoires suivantes (décrites par les équations de parcours temporel  $(x(t) = x(0) e^{at}, y(t) = y(0) e^{-bt})$   $a$  et  $b$  étant ici deux nombres réels positifs) :



Comme cette situation est caractéristique de la géométrie hyperbolique, le système dynamique porte également le nom d'hyperbolique.

Il possède la propriété générale d'être structurellement stable, une légère perturbation des paramètres – ici  $a$  et  $b$  – ne modifiant pas le comportement général du système.

Le contenu du second tableau n'est pas étranger à celui du premier. Le météorologue Lorenz a établi un modèle des courants de convection dans l'atmosphère. C'est d'abord par la visualisation des trajectoires qu'est apparu le caractère étrange et chaotique du système. Cette visualisation première se présentait sous une forme un peu différente de celle que l'on voit dans le tableau présent, elle rappelait les deux ailes d'un papillon ; d'où est venue l'appellation d'effet papillon au fait qu'une perturbation apparemment insignifiante en un endroit peut avoir des conséquences très importantes dans un autre lieu, qui peut être fort éloigné du premier tant dans l'espace que dans le temps.

On a fait de Poincaré le premier à avoir énoncé la présence possible de tels phénomènes, mais à vrai dire il s'agit là d'un fait pressenti depuis fort longtemps (cf. les citations de Galilée et d'Alexandre Dumas que donne, en ses pages 21 et 22. <http://www.chass.utoronto.ca/epc/srb/cyber/bruter5.pdf>)

Un des points communs essentiels entre les deux tableaux est la présence de nœuds de trèfle : ils dessinent la forme des attracteurs périodiques associés au système de Lorenz.

#### 4. Le dodécaèdre : Charles Gunn, John Sullivan et Poincaré

Poursuivant notre visite, revenant sur nos pas, nous rencontrons une grande impression sur toile signée Charles Gunn, alors que symétriquement, venant de l'entrée, se trouve sur notre gauche un tableau de John Sullivan intitulé 119 Bubbles. Lui fait pratiquement face une vitrine, où l'on voit deux photographies où Poincaré est présent, et un grand poster à fond



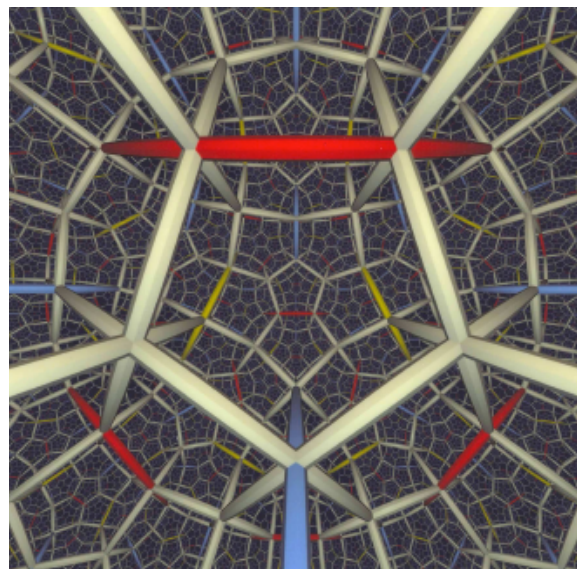
jaune consacré à une « Triangulation of the Poincaré Homology 3-sphere ». Il se pourrait que le poster et les œuvres susnommées aient quelques points communs.

L'équivalent en trois dimensions du disque de Beltrami-Poincaré  $D^2$  muni de sa métrique hyperbolique est la boule  $D^3$  qu'on va munir de la métrique hyperbolique. On a vu qu'on pouvait paver le disque par des polygones réguliers hyperboliques: ce sont les images de polygones réguliers d'un même type tracés sur l'hyperboloïde, leurs côtés sont des morceaux d'hyperboles qui ont pour images sur le disque soit des segments rectilignes, soit plus généralement des portions de cercle; et lorsqu'ils se trouvent bien loin vers l'infini sur l'hyperboloïde, leurs images sont évidemment toutes petites sur le disque.

Un phénomène analogue se produit lors du pavage de la boule hyperbolique, réalisé cette fois-ci avec l'équivalent en trois dimensions de polygones que sont des polyèdres.

Les polygones hyperboliques ont génériquement pour côtés des arcs de cercle, les polyèdres hyperboliques génériques ont pour face des portions de notre sphère habituelle  $S^2$ . Seuls quelques polyèdres hyperboliques réguliers peuvent paver la boule hyperbolique: c'est le cas du dodécaèdre hyperbolique.

La toile sur laquelle est imprimée l'œuvre de Charles Gunn nous a été offerte par nos collègues allemands qui ont créé un musée itinérant, Imaginary. L'image est extraite de la vidéo NotKnot créée en 1991 à l'Université du Minnesota. Nous y voyons un élément d'une représentation de l'espace hyperbolique à trois dimensions, pavé par des dodécaèdres qui, par effet de perspective, nous paraissent de plus en plus petits qu'ils sont plus éloignés de nous, et dont les faces sont planes et non pas sphériques.



**Espace hyperbolique.**

**Charles GUNN**

La raison est que la représentation de l'espace hyperbolique est un peu différente de celle que nous avons utilisée jusqu'à présent. Dans celle-ci, en dimension 2, le faisceau lumineux qui donnait l'image de l'hyperboloïde était issu du pôle sud. Si maintenant nous plaçons la source de lumière au centre de l'hyperboloïde, le plan d'intersection passant par ce centre qui coupe

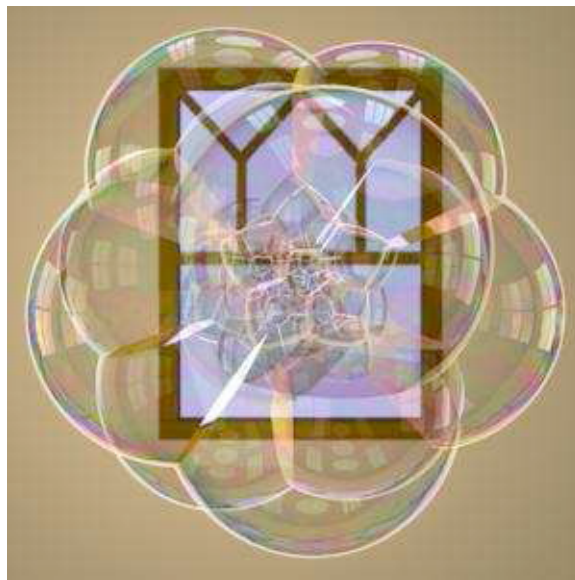
l'hyperboloïde selon une hyperbole, coupera le plan équatorial selon une droite - l'intersection de deux plans quelconques est une droite. C'est cette représentation de l'espace hyperbolique, dite de Klein, qui est utilisée par Charles Gunn – l'intersection de deux sphères demande sans doute davantage de temps de calcul que l'intersection de deux plans.

En soufflant à l'intérieur d'un dodécaèdre aux faces élastiques, on obtient la sphère ordinaire: de notre point de vue topologique, il s'agit du même objet. Le dodécaèdre ayant des faces pentagonales, on peut considérer que la sphère ordinaire peut être pavée par des pentagones réguliers.

Y aurait-il un pavage de ce genre pour la sphère  $S^3$ ? Une construction de Poincaré apporte une réponse positive.

Avec un ruban de papier, on construit aisément un tore : en courbant la bande dans le sens de la longueur on parvient à coller les côtés allongés, on les identifie et on obtient ainsi un tube. En courbant le tube, on identifie les deux cercles situés en ses extrémités, c'est-à-dire qu'on les colle, on a obtenu le tore.

L'exercice est moins facile à réaliser avec les faces d'un dodécaèdre, ce qu'a pourtant fait Poincaré. Il identifie les faces opposées en les faisant tourner d'un angle convenable. L'espace obtenu est appelé l'espace dodécaédrique de Poincaré: 120 d'entre eux permettent de paver la 3-sphère, ou encore définissent un hyper-polyèdre dans l'espace euclidien à quatre dimensions, doté de 120 côtés, et dont les faces sont des dodécaèdres réguliers tridimensionnels.



**John Sullivan**

L'œuvre de John Sullivan nous montre une projection stéréographique dans notre espace usuel de cet hyper polyèdre.

Poincaré a conçu le moyen d'associer des ensembles de nombres structurés en groupes aux domaines les plus courants d'un espace et appelés « groupes d'homologie »: le fait

que deux domaines partagent ces mêmes groupes entraîne parfois leur équivalence en un sens mathématique précis.

Poincaré a pensé un moment que si la 3-sphère et un autre domaine compact de l'espace à 4 dimensions possédaient les mêmes groupes d'homologie, ledit domaine était continûment déformable en la sphère. L'énoncé est du même genre que celui de la fameuse ex-conjecture.

Il a fallu déchanter, Poincaré lui-même trouvant un contre-exemple, l'objet obtenu par identification de leur bord de deux tores pleins à deux trous chacun – on a vu que si ces tores sont de genre 1 (ce sont les tores habituels à un seul trou), le résultat de l'identification est bien la 3-sphère.

Le poster des mathématiciens Anders Björner et Frank Lutz donne une autre construction, inspirée de celle de mathématiciens fort actifs pendant la première moitié du vingtième siècle, Siefert et Threlfall. Peut-être certains seront sensibles à l'esthétique de cette œuvre mathématique, à la qualité de sa présentation, à la créativité qu'elle révèle et que partagent nombre de mathématiciens et artistes.

## **5. La surface de Kuen vue par Richard Palais & Luc Bénard : fin de la visite du rez-de-chaussée**

Poincaré aura beaucoup contribué à la connaissance du monde hyperbolique d'une très grande richesse, en particulier, on l'a vu par le rôle éminent qu'il a fait jouer au groupe des homographies, qu'il nommait d'ailleurs le groupe hyperbolique.

Sur une surface, comme celle d'une montagne, on peut a priori trouver des singularités, c'est-à-dire des pointes, des pics, des courbes composées uniquement de tels pics. En dehors de ces singularités, les points de la surface sont dits réguliers, et par chacun de tels points passent deux courbes tracés sur la surface et perpendiculaires entre elles. Chacune de ces courbes possède en chaque point une courbure, la courbure totale de la surface en un tel point étant le produit des deux courbes perpendiculaires qui s'y croisent.

Si en ce point, comme celui situé en plein milieu d'un col ou d'une selle, l'une des courbes a l'air d'une parabole tournée vers le haut, alors que la courbe perpendiculaire ressemble également à une parabole mais tournée vers le bas, les deux courbures locales des courbes sont de signe opposé, et la courbure totale est négative.

Ainsi, une surface qui ressemble localement à un col ou a une selle, qu'on a appelé dans les premières pages hyperbolique, a une courbure locale négative, et c'est ce qui caractérise les surface hyperboliques, si nombreuses. La valeur de la courbure totale change en général quand on se déplace sur la surface.

Il existe toutefois des surfaces dont la courbure totale est en tout point régulier négative et constante, sauf bien sûr en ses singularités. Appartenant à toute une famille de telles surfaces mise en lumière par Enneper vers 1863, c'est le cas d'une surface particulière, d'une morphologie inattendue, assez complexe et dotée d'une ligne de singularités: découverte et étudiée en 1884 par T. Kuen, elle en porte le nom.



### **Richard Palais & Luc Bénard**

C'est la partie centrale de cette surface intrigante que Luc Bénard, en collaboration sur le plan mathématique avec Richard Palais, a mise en valeur à travers une maîtrise remarquable des jeux de lumière, l'ordinateur et la programmation des couleurs permettant d'atteindre une précision, une finesse, une exactitude que les meilleurs peintres d'autrefois ne pouvaient atteindre. Ce tableau a été primé en 2009 par la National Science Foundation.

D'autres surfaces hyperboliques, apparues plus récemment, dans la seconde moitié du vingtième siècle, comme solutions d'équations aux dérivées partielles issues de l'hydrodynamique, ont également attiré le regard curieux et imaginaire d'autres artistes. Bien des œuvres de Jean Constant que l'on verra à la bibliothèque en porteront témoignage.

### **En bibliothèque, en ce mois de Juin 2010**

75 œuvres sont exposées dans la bibliothèque. Sans compter les abondantes sculptures que l'on peut admirer dans les vitrines, sculptures permanentes, ou temporaires avec des œuvres de :

François APÉRY, Philippe CHARBONNEAU, Richard DENNER, George HART, Dmitri KOZLOV, Hervé LEHNING, Philippe RIPS,

Dans l'entrée, sont 13 œuvres de:

Tamás FARKAS (2), Mike FIELD (4), Jos LEYS (3), Slavik JABLAN (2), François TARD (2).

Dans le couloir donnant sur l'extérieur du bâtiment, sont 10 œuvres de :

John SULLIVAN (4), Ulrich PINKALL (1), Luc BÉNARD (2), Patrice JEENER (2), Jos LEYS (1).

Au fond de la bibliothèque, sont 22 œuvres de:

Jos LEYS (5), Jean-François COLONNA (2 + 6), Mike FIELD (2), Dick TERMES (3), Tom BANCHOFF (1), François TARD (2), David AUSTIN-Bill CASSELMAN-David WRIGHT (1)



Dans le couloir muni des consoles d'ordinateur, sont 8 œuvres de:

Sylvie PIC (2), Miroslav ZEC (1), Oliver LABS (1), Luc BÉNARD (1), Herwig HAUSER (2), Tom BANCHOFF (1)

Dans la salle de lecture, sont 22 œuvres de:

Benno ARTMANN (1), Jean-François COLONNA (1), Jean CONSTANT (11), Patrice JEENER (6), Irène ROUSSEAU (3).

Et, enfin, un Livre d'Or.

